

# 以磁耦合等效電路法分析台北市捷運系統 導電軌之集膚效應暨阻抗頻變特性

*Analysis of the Skin Effect and Frequency-dependent Impedance of Power Rails  
of Taipei Rapid Transit System Using Magnetic Couple-circuit Theory*

王耀諄

張成仲

林文進

國立雲林科技大學  
電機工程技術系副教授

財團法人金屬工業研究中心  
自動控制組工程師

台北市政府捷運工程局  
第三處供電課工程師

## 摘要

本文以磁耦合電路之理論探討捷運供電系統導電軌（一稱第三軌）於不同頻率下之集膚效應，分析之研究結果對於捷運供電系統頻變阻抗之計算甚有裨益，本文對磁耦合電路之求解亦提出一甚為迅速之新方法。

關鍵字：集膚效應，磁耦合，頻變阻抗，電氣鐵路，捷運系統，第三軌

## Abstract

A study into the variations of resistance and inductance of a power rail using coupled-inductance circuit model is presented in this paper. The proposed model allows the frequency-dependent impedance of the power rail to be calculated, and the current distribution over the rail cross section to be visualized. This paper also presents a numerical technique that enables faster resolution of the coupled-inductance circuit.

*Keywords: Skin effect, Magnetic coupling, Frequency-dependent impedance, Electric traction, Rapid transit systems, Third rail*

## 1. 緒論 - 淺談集膚效應之分析方法

由於捷運電聯車係透過換流器（Inverter）將導電軌750伏特直流電壓轉換成交流380伏特，以驅動三相感應馬達運轉，以及電聯車上空調、照明等大量非線性負載，勢必造成導電軌上有某數量級的諧波電流成份。而本文以磁耦合電路模型之理論，有效的模擬導電軌電流上各種頻率下的分佈情形，同時也計算出導電軌的頻變阻抗參數，對於捷運供電系統頻變阻抗之計算及應用將有所裨益。

集膚效應乃由流經導體之交變電流所產生的時變磁場所引起。由於磁場的作用，

使得導體中的電流在導體截面上呈不均勻之分佈，而且有集中於導體表面的趨勢，故稱集膚效應。對相同材質、形狀的導體而言，此一效應隨頻率之升高越趨明顯，因此導體的電阻及電感也隨頻率而變。既然頻率愈高電流愈朝導體表皮集中，直覺上便可推論導體的電阻會隨頻率之上升而增加；(內)電感則隨頻率之上升而減少。許多計算導體頻變阻抗的近似模型就是根據此種物理現象加以簡化後開發出來的。

如果只是要計算導體在集膚效應下的阻抗變化情形，使用考慮穿透深度的近似模型即可，但是如果想要精確的計算導體截面電流的分佈情形，問題就顯得複雜多了。目前能以解析法求解集膚效應的情形僅有兩種：一是無限延伸的平板導體，一是圓形截面的實心長直導線。前者常在一般「電磁學」的教材中出現，作為推導「穿透深度」(*depth of penetration*) 的範例；後者則常見於比較高等的「電力系統」課本中，作為電力傳輸線頻變參數模型之依據，其數學形式已涉及修正型貝賽函數 (*modified Bessel function*) 及其導數 [1]，可說相當複雜。至於不規則截面導體集膚效應之分析，則非借助數值方法不能窺其堂奧。

目前分析任意截面形狀導體集膚效應最普遍的數值方法應該是有限元素法。此一方法可說是解偏微分方程的最佳利器，可依邊界條件直接求解主宰集膚效應的擴散方程式 (*diffusion equation*)，求出電流密度的二維分佈情形。不過有限元素法雖然功能強大且精確，計算機程式的設計卻相當複雜，一般都以專業套裝軟體的形式供使用者使用，軟體的成本卻反而使此一方法成為令人裹足不前的因素。對一經費並非十分充欲的研究單位而言，購買或租用此一軟體的成本已足以使求解集膚效應的研究熱誠消散殆盡。

另一可行的數值方法為磁耦合等效網路法。此法由 *Silvester* [2]所提出，其原理為將導體視為由  $n$  根方形截面的細條狀導體所組成，我們暫稱這些細條狀導體為「次導體」，每一次導體的等效電路即為一 R-L 串聯電路。只要  $n$  足夠大，則導體截面可精確的予以近似。磁耦合等效網路法即建立一個包含  $n$  個並聯「R-L串聯支路」的網路，其中每個支路的電感都與其它支路的電感耦合。利用此一電路模型，複雜的集膚效應問題就變成了電機工程師所熟悉的電路分析問題，此法不僅對問題的簡化甚有裨益，且又不失其精確性與物理意義。

*Silvester* 除了提出磁耦合等效網路法之外，也提出了求解的方法。他嘗試以模態網路 (*modal networks*) 的原理求出導體截面上電流密度的二維分佈情形。基本上，模態網路原理是將原來相互耦合的電感矩陣 ( $n \times n$ )，透過矩陣特徵值向量的變換，重新得到一個無耦合的(即對角化的)電感矩陣，藉以簡化模態電流的計算。電感矩陣的  $n$  個正規化特徵向量，恰是  $n$  個近似的正交函數。導體截面上之電流密度於是得以廣義傅立葉級數的形式來表示，級數的每一項是由正規化之特徵向量所近似的(二維)正規化正交函數所組成，而其係數則可由先前求出的模態電流求得。嚴格說起來，*Silvester* 所提出的解法並不容易，既要計算  $n$  階矩陣的特徵值向量，又要計算廣義傅立葉級數的係數，計算量之負擔不可忽視。另外，由廣義傅立葉級數所產生的截位誤差亦為一缺點。

本文仍採用磁耦合等效網路法來分析台北市捷運系統淡水線導電軌的集膚效應問題，但在求解的方法上，則提出一種新的改良解法，僅需求解一  $n$  階複係數之線性聯立方程式，就可得到在任意頻率下導電軌截面的電流分佈函數。在求解複係數線性聯立

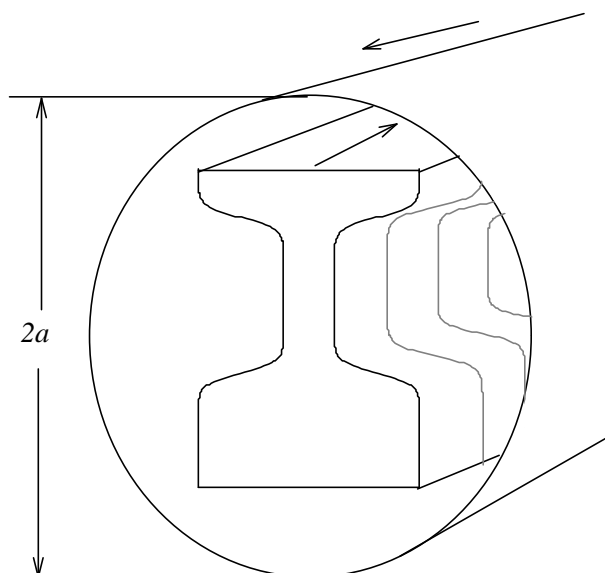
方程式之數值方法上，我們也嘗試改寫方程式的形式，因而發現針對集膚效應的問題，複係數線性聯立方程式可經由適當的變換，改以實係數線性聯立方程式求解。如此，我們發現計算的速度竟然提升四倍之多，實在令人振奮。

本文除了分析集膚效應對導電軌截面電流分佈的影響，也提供導電軌頻變阻抗的詳細資料。導電軌的頻變阻抗在計算諧波阻抗時為一重要之依據。

## 2. 磁耦合等效網路法

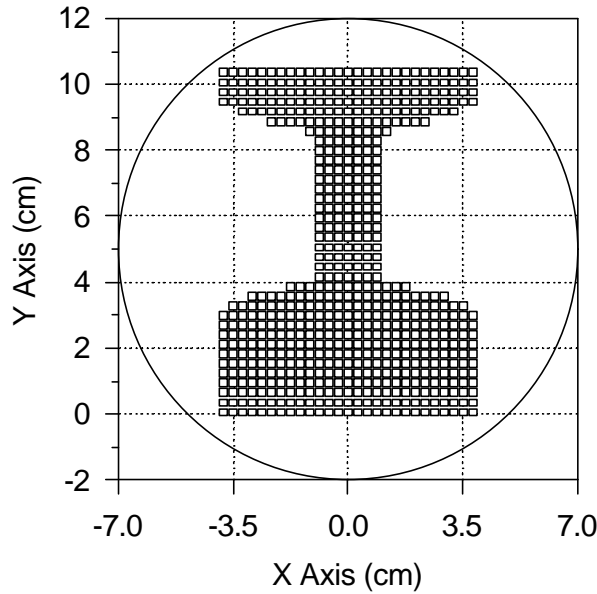
### 2.1 基本原理與假設

電流在導體中的分佈除了受集膚效應的影響之外，也受「鄰近效應」(*proximity effect*) 的作用。集膚效應會使電流集中於導體表面，而鄰近效應則使電流朝電流迴路的方向集中。使用磁耦合等效網路法首先必須將導體分割成許多方形截面的次導體，並計算所有次導體的自感與互感。次導體電感的計算必須要有參考的電流迴路才能得到具有物理意義的電感值，否則一無迴路之電流周圍的磁通可擴大到無窮遠處，電感就是無窮大。為解決此一問題，*Silvester* 以一假想的圓柱形導體殼當作導體的電流迴路，但是為了免除鄰近效應的影響，他假設導體殼中的電流是均勻分佈的，因此殼內的磁場完全不受迴路電流的影響，導體內的電流分佈僅受集膚效應之作用。注意，圓柱形導體殼以及其電流分佈都是假想的，目的只是方便電感的計算及免除鄰近效應的影響。圖一以導電軌為例，將導電軌包覆在圓柱形導體殼中。



圖一 導電軌包覆於一半徑為  $a$  假想之圓柱形導體殼中，導體殼提供導電軌之電流迴路，且電流均勻分佈於殼上，因此殼內的磁場不受殼中電流影響。

圖一中的圓柱形導體殼的半徑  $a$  可任意選取，一般以恰能包覆整個導體即可。事實上， $a$  的大小僅影響導體的外電感值 (*external inductance*)，對其內電感 (*internal inductance*) 及對分析導體的集膚效應則無影響。圖二表示導電軌分割成許多次導體後的情形，圓柱導體的尺寸也示於圖中。最後要說明的是，我們假設在次導體中的電流是均勻分佈的。當次導體的數目  $n$  相當大時，導電軌截面上實際的電流分佈情形就由步階化的次導體電流來近似，數目  $n$  愈大，近似之誤差就愈小。



圖二 分割成次導體後的導電軌截面，假想的空心圓柱形導體也示於圖中

## 2.2 電路參數之計算

每一次導體單位長度的電阻值為

$$r = n [1/(sA)] \quad (1)$$

其中  $s$  與  $A$  分別為導電軌之電導係數及截面積。第  $i$  與第  $j$  根次導體間單位長度的互感可表為

$$l_{ij} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{a}{d_{ij}} \quad (2)$$

其中  $d_{ij}$  為第  $i$  與第  $j$  根次導體間的幾何平均距離 (*geometric mean distance, GMD*)， $a$  為假想之中空圓柱形導體之半徑，亦恰為任一次導體與圓柱形導體之間的幾何平均距離。值得注意的是，(2) 式亦適用於計算次導體之自感。當  $i=j$  時， $d_{ij}$  即表示次導體的自幾何平均距離，或稱為幾何平均半徑 (*geometric mean radius, GMR*)。對一邊長為  $\lambda$  之正方形實心導體而言，其幾何平均半徑  $g_s$  可以下式之四重積分求得 [3]：

$$\ln(g_s) = \frac{1}{I^4} \int_0^I \int_0^I \int_0^I \int_0^I \ln \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2} dx dy du dv \quad (3)$$

式中之變數  $x, y, u, v$  皆為積分之啞變數。(3) 式的解析解答並不容易求得，但以數值積分法可得到答案，而且幾何平均半徑與正方形的邊長成正比，因此我們以數值積分法將

(3) 式簡化成：

$$g_s = 0.44705 \lambda \quad (4)$$

此處必須再次強調，假想之中空圓柱導體與任一次導體之間的  $GMD$  為  $a$ ，中空圓柱導體的  $GMR$  亦為  $a$ ，此一性質使得電感矩陣得以十分簡易的由 (2) 式計算而得，此亦為選擇假想中空圓柱的另一優點。

圖三之電路即為導電軌之磁耦合等效電路模型。圖中之參數可由 (1)~(4) 式求得。圖中之  $I_T$  為導電軌之總電流， $I_1, I_2, I_3, \dots, I_n$  即為各次導體中之電流。集膚效應之分析則在於求出各次導體中電流之相對大小。



圖三 磁耦合等效電路模型及各參數

### 3. 磁耦合電路之分析

#### 3.1 電路之矩陣方程式

在穩態正弦激勵下，圖三電路中之電流與電壓之間的關係可以寫成電壓及電流相量之矩陣方程式：

$$[V] = [R][I] + j\omega[L][I] = [Z][I] \quad (5)$$

式中  $[V]$  為電壓向量， $[I]$  為電流向量， $[R]$  為電阻矩陣， $[L]$  為電感矩陣， $[Z]$  則為阻抗矩陣。各矩陣(向量)之詳細表示式如下：

$$[R] = \begin{bmatrix} r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & r \end{bmatrix} \quad [L] = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & \dots & l_{1n} \\ \vdots & l_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & \dots & \dots & l_{nn} \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{I}] = [\mathbf{I}_1 \quad \mathbf{I}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{I}_n]^T$$

$$[\mathbf{V}] = [\mathbf{V}_1 \quad \mathbf{V}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{V}_n]^T = \mathbf{V} [1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1]^T$$

此處必須注意的是， $[\mathbf{R}]$ ， $[\mathbf{L}]$ ， $[\mathbf{Z}]$  及  $[\mathbf{V}]$  都是單位長度之值。

由於所有次導體事實上是連接在一起的，所以沿著所有次導體的壓降必須相等，因此電壓向量  $[\mathbf{V}]$  的所有元素也必然相等，即  $\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_3 = \cdots = \mathbf{V}_n = \mathbf{V}$ 。欲求出導電軌截面上的電流分佈情形，僅須任意假設 (5) 式中之壓降  $\mathbf{V}$  之值，再解出此線性聯立方程組，就可得出在所考慮的頻率下，電流向量  $[\mathbf{I}]$  各個元素之值。如果我們刻意指定  $\mathbf{V}$  之值為每米 1.0 伏特，即  $\mathbf{V} = 1.0 \angle 0^\circ$  Volts/m，則 (5) 式就成為求阻抗矩陣  $[\mathbf{Z}]$  之反矩陣的問題，即求導納矩陣  $[\mathbf{Y}]$ ：

$$[\mathbf{Y}] = [\mathbf{Z}]^{-1} \quad (6)$$

### 3.2 頻變阻抗之計算

(5) 式之解答除了立刻可用來分析導電軌截面在某一頻率下，電流的分佈情形之外，也提供了計算頻變電阻及電感的捷徑。所有次導體電流之總和，必然等於導電軌之電流  $\mathbf{I}_T$ ，因此一旦求得電流向量  $[\mathbf{I}]$ ，導電軌之電流可表為：

$$\mathbf{I}_T = \sum_{i=1}^n \mathbf{I}_i \quad (7)$$

導電軌每單位長度之阻抗可寫成：

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_r &= \mathbf{V} / \mathbf{I}_T = R_r(\omega) + j\omega L_r(\omega) \\ &= R_r(\omega) + j\omega(L_{int}(\omega) + L_{ext}) \end{aligned} \quad (8)$$

其中  $R_r(\omega)$  為導電軌之頻變電阻。導電軌之電感包括內電感及外電感兩部份：內電感  $L_{int}(\omega)$  為頻率之函數，外電感  $L_{ext}$  則與電流迴路之幾何配置有關，但不受頻率之影響。最後，我們覺得有必要強調，(8) 式之頻變阻抗  $\mathbf{Z}_r$  亦可由 (6) 式所求得的導納矩陣推導而得：

$$\mathbf{Z}_r = \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n y_{ij} \right)^{-1} \quad (9)$$

式中  $y_{ij}$  為導納矩陣之元素。

## 4. 模擬結果

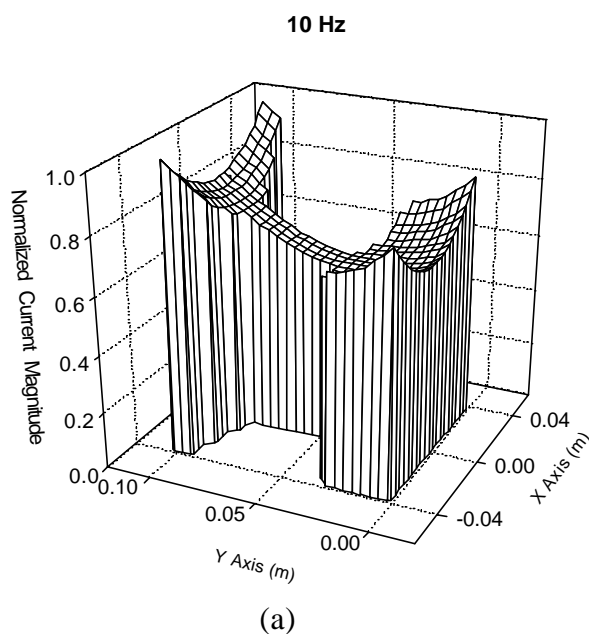
導電軌截面的電流分佈情形是以 (1)~(5) 式為基礎，透過電腦數值模擬，以 Fortran 語言撰寫程式，求出  $n$  根次導體電流的相量解。導電軌截面先分割成  $n$  個等面積的正方形次導體如圖二所示，再依次導體間的距離計算電阻及電感矩陣  $[R]$ ,  $[L]$ 。求解 (5) 式即可得到所有次導體中的電流相量 (包括大小及相角)。由於我們僅對導電軌捷面電流密度的相對大小感興趣，因此所有電流相量的大小都已正規化，使最大電流的大小為 1.0。

#### 4.1 電流密度的三維圖形

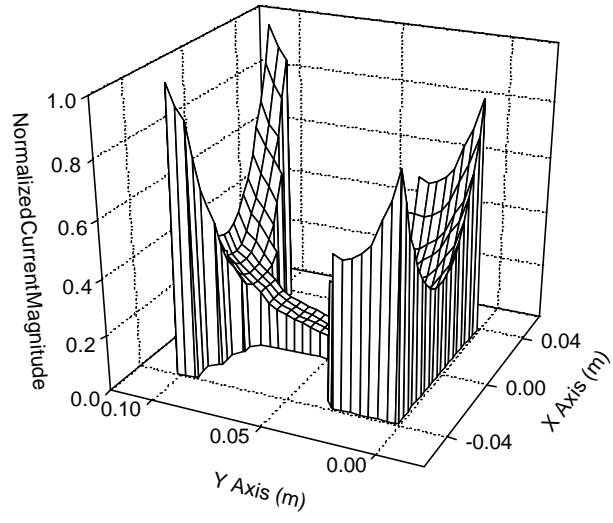
模擬的結果示於圖四 (a), (b), (c) 及 (d) 中，分別以三維的圖形來表示導電軌捷面電流密度在 10 Hz, 60 Hz, 300 Hz 及 1200 Hz 時的分佈情形。值得吾人注意的是，在 10 Hz 的低頻之下，導電軌的集膚效應已非常明顯，集膚效應發生在如此低頻之下可能出乎大部份的電機工程師意料之外。於圖四 (a) 中吾人可清楚的看出，電流不僅在導電軌的左右兩側集中，也朝導電軌的上下兩側集中，屬於相當複雜的物理現象。

圖四 (b) 是在 60 Hz 時導電軌截面電流的分佈情形。在 60 Hz 時，集膚效應已發展至相當程度，由三維的圖形可清楚的看出在導電軌截面的上下兩側，電流密度沿 X 軸成拋物線對稱於 Y 軸變化的情形。由於 60 Hz 電流屬於市電頻率的基本波，在此頻率下的集膚效應有基本的重要性。

在 300 Hz 及 1200 Hz 時的集膚效應情形已示於圖四 (c)、(d) 之中，此時吾人可明顯看出電流已集中在導電軌截面的角落及上下外側周緣部份。300 Hz 相當於五次諧波，是電力系統最常見的諧波干擾成份，而 1200 Hz 相當於 20 次諧波，高於 20 次的諧波成份一般已可當作雜訊來處理，因此我們也繪出 1200 Hz 時的集膚效應情形。

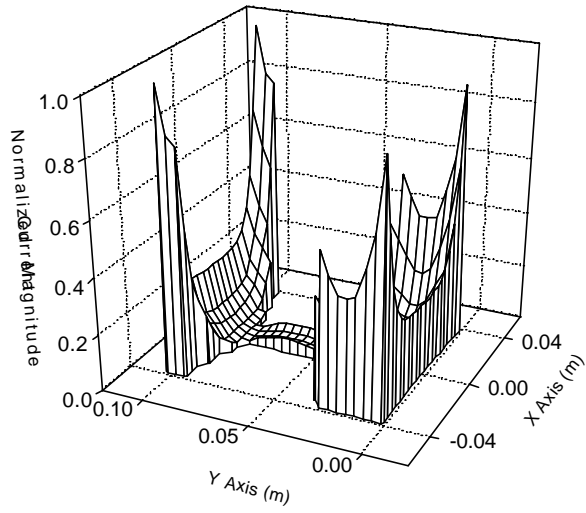


60 Hz

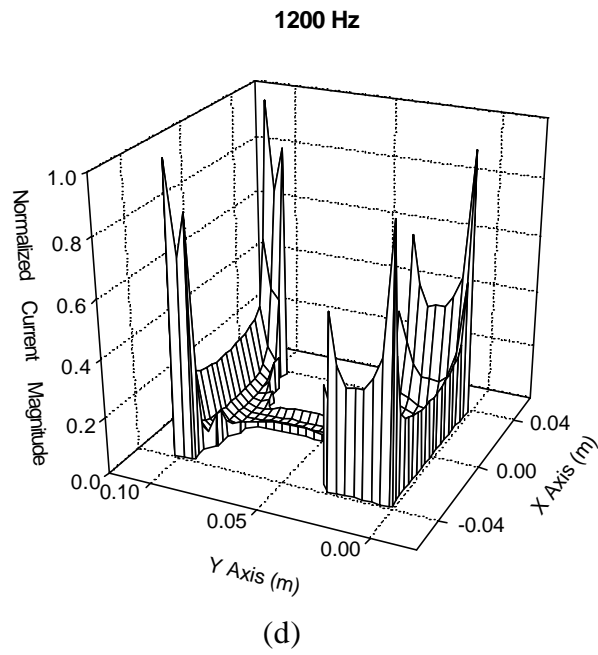


(b)

300 Hz

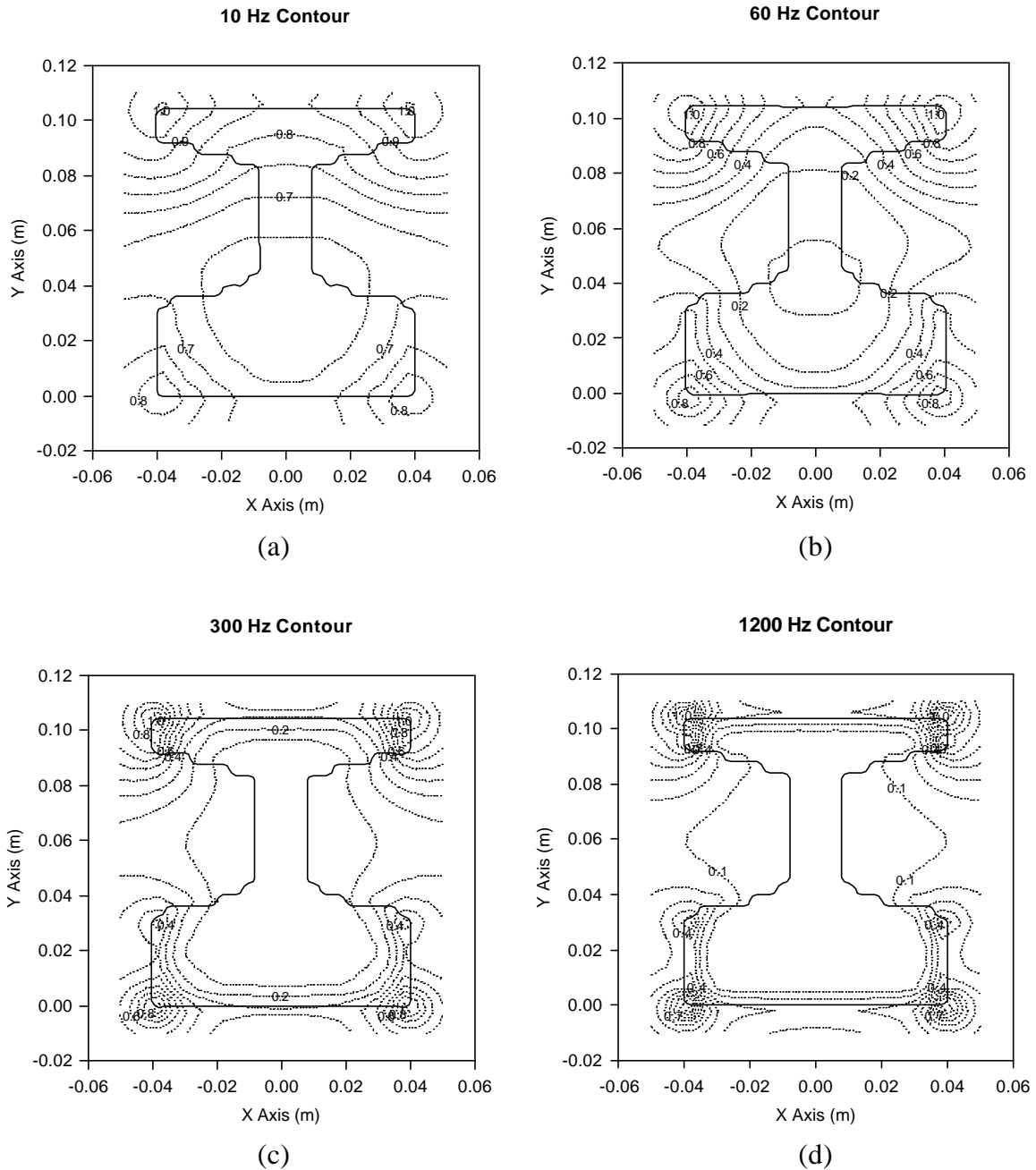


(c)



圖四 集膚效應作用下，電流在導電軌截面的分佈情形。

(a) 10 Hz, (b) 60 Hz, (c) 300 Hz, (d) 1200 Hz



圖五 正規化等電流密度線在導電軌截面的分佈情形。注意，於導電軌輪廓內的等電流密度線才具有物理意義，在輪廓外的等電流密度線僅代表數值內插的結果，沒有任何物理意義；(a) 10 Hz, (b) 60 Hz, (c) 300 Hz, (d) 1200 Hz

#### 4.2 集膚效應的二維圖形分析

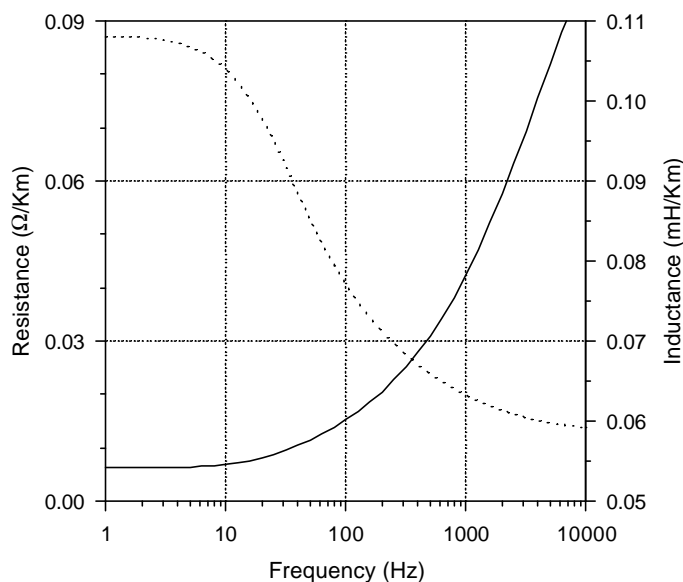
圖五為電流集膚效應的二維表示法。圖中的實線清楚的勾勒出導電軌的外圍輪廓，虛線則代表等電流密度線。圖五 (a), (b), (c) 及 (d) 即對應於圖 4 (a), (b), (c) 及 (d)，繪出在不同頻率下等電流密度線在導電軌截面的分佈情形。此處必須說明的是，在

圖五中，於導電軌輪廓內的等電流密度線才具有物理意義，而在導電軌輪廓外的等電流密度線僅代表數值內插的結果，沒有任何物理意義。畢竟，電流僅在導電軌內流動，於導電軌外部是沒有電流的。

我們可以清楚的看到等電流密度線隨著頻率上升而逐漸朝導電軌的角落及周緣集中。圖五的二維表示法提供了解釋集膚效應的另一方式。

#### 4.3 頻變電阻與電感

分析集膚效應的另一重要結果為導電軌頻變阻抗的計算。由於捷運系統電聯車的電力是經由導電軌及鋼軌傳送，在研究捷運系統直流電力網路的諧波阻抗模型時，電聯車軌道的頻變阻抗參數就扮演著極重要的角色。由 (7) 及 (8) 式，我們所開發的 Fortran 程式能精確的計算出導電軌電阻及電感隨頻率而變化的情形。



圖六 導電軌電阻(實線)及電感(虛線)隨頻率變化的情形

圖六繪出導電軌單位長度電阻及電感在頻率自 1.0 至 10,000 Hz 的變化情形。吾人可看出導電軌的電阻 (實線) 隨頻率上升而增加，這是因為電流於頻率升高時集中於導電軌截面的角落及周緣，使導電軌的有效截面積逐漸減小所致。另一方面，吾人可觀察出電感則隨頻率上升而下降，成一倒 S 形曲線變化，在頻率升高時，電感會下降逐漸趨近一最小值。電感隨頻率上升而減少的原因，是由於電流朝導電軌表面集中之後，於導電軌內部的磁交鏈數減少所致，因此所減少的部份為內電感  $L_{int}$  之變化量，至於外電感  $L_{ext}$  是不隨頻率而變的，也就是當頻率升高至極高頻時 (理論上為趨近無限大時) 之電感值。值得再次強調的是，外電感值  $L_{ext}$  和我們所選擇的假想中空圓柱導體的半徑  $a$  有關，但內電感值  $L_{int}$  則與半徑  $a$  無關。

## 5. 複係數線性聯立方程組的改良數值解法

在結束本文之前，我們簡單的討論一種複係數線性聯立方程組的解法，這種解法特別適用於求解磁耦合電路模型，可將複係數方程式改以實係數方程式求解，不但可節省大量的記憶空間，更可提升計算速度達四倍之多。

在求解 (5) 式時，阻抗矩陣  $[Z]$  為一複數矩陣，電壓、電流向量  $[V]$ 、 $[I]$  也都由複數元素所組成。現在以  $[V_r]$ ,  $[V_i]$ ,  $[I_r]$ ,  $[I_i]$ ,  $[Z_r]$  及  $[Z_i]$  分別代表  $[V]$ ,  $[I]$  及  $[Z]$  的實部與虛部。(5) 式可重寫如下：

$$\{[Z_r] + j[Z_i]\} \cdot \{[I_r] + j[I_i]\} = \{[V_r] + j[V_i]\} \quad (10)$$

將實部與虛部分別列出等式：

$$[Z_r][I_r] - [Z_i][I_i] = [V_r] \quad (11)$$

$$[Z_i][I_r] + [Z_r][I_i] = [V_i] \quad (12)$$

前已述及電壓降  $V$  之值可以任意指定，如果指定為  $V=1.0 \angle 0^\circ$ ，則 (5) 式成為求反矩陣的問題。此處，我們可以令電壓降  $V$  的虛部為零，以便獲得進一步的化簡，即令  $[V_i]=0$ ，則由 (12) 式可得電流實部與虛部間的關係式：

$$[I_i] = -[Z_r]^{-1}[Z_i][I_r] \quad (13)$$

將 (13) 代入 (11)，得

$$\{[Z_r] - [Z_i][Z_r]^{-1}[Z_i]\} \cdot [I_r] = [\alpha][I_r] = [V_r] \quad (14)$$

$[Z_r]$  為由次導體電阻  $r$  所組成的對角矩陣，其反矩陣則是由  $1/r$  所組成的對角矩陣。此一性質對 (14) 式的化簡甚有助益。因此，新的係數矩陣  $[\alpha]$  可寫成：

$$[\alpha] = r[U] - (1/r)[Z_i]^2 \quad (15)$$

其中  $[U]$  表示單元矩陣。現在，我們只要先解  $[\alpha][I_r] = [V_r]$  之實係數線性方程式，得到  $[I_r]$  之後再代入 (13) 式，即可得到  $[I_i]$ 。(13) 式可以更簡單的形式表示如下：

$$[I_i] = -(1/r)[Z_i][I_r] \quad (16)$$

電流向量的全解就可由  $[I] = [I_r] + j[I_i]$  得到。

## 6. 結論

在本文中我們以磁耦合電路模型有效的模擬導電軌電流在各種頻率下的分佈情形，同時也計算出導電軌的頻變阻抗參數。本文中所提出求解磁耦合電路模型的方法不但簡單，而且精確，如果再配合本文所提出的複係數線性方程式解法，計算的速度更可提升四倍之多。雖然在本文中並未詳細討論磁耦合電路模型的精確度問題，但是我們在使用此方法之前，已先以圓柱形實心導體為對象，比較磁耦合電路模型之解與解析解答之間的誤差情形，其結果顯示次導體的數目  $n$  在 100 以上時，磁耦合電路模型就已十分精確，對其它不規則形狀導體之精確度，目前已利用有限元素電磁場分析軟體作更深入的確認分析。

## 7. 參考文獻

- [1] A. P. Sakis Meliopoulos, *Power System Grounding and Transients: An Introduction*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1988, Chapter 3
- [2] P. Silvester, "Modal network theory of skin effect in flat conductors," *Proceedings of the IEEE*, Vol. 54, No. 9, Sep. 1966, pp. 1147-1151
- [3] M. Aguet et J. J. Morf, *Énergie Électrique*, Dunod, 1987, Paris